ВЛИЯНИЕ ТЕМПЕРАТУРЫ И КОНЦЕНТРАЦИЙ НА СТРУКТУРУ ТУРБУЛЕНТНОГО ТЕЧЕНИЯ

На характер турбулентности очень сильное влияние оказывают пульсирующие объемные силы, если они взаимосвязаны с пульсациями скорости. Самым простым примером является сильное влияние сил тяжести на течение с пульсациями плотности. Если пульсации плотности появляются в результате того, что имеется средний градиент плотности в том направлении, что и средний градиент скорости, или когда течение фактический возникает из-за разности средних плотностей, то между пульсациями плотности и скорости имеется хорошая корреляция и влияние сил плавучести может быть очень велико. В случае, когда плотность увеличивается в вертикальном направлении снизу вверх, имеем неустойчивое течение, и взаимосвязь плотности и скорости может привести к преобразованию потенциальной энергии в турбулентную кинетическую энергию. Наоборот, когда плотность уменьшается снизу вверх быстрее, чем это необходимо для сохранения гидростатического равновесия жидкости, то имеющаяся турбулентная энергия может быть преобразована в потенциальную энергию, это значит, что турбулентное перемешивание стремится уменьшить градиент плотности и таким образом повысить центр тяжести объема жидкости.

В рассматриваемой проблеме основной задачей является получение в явном виде выражения для турбулентных характеристик через средние характеристики турбулентного потока. Для описания сложных турбулентных течений, где присутствуют температура и концентрация используются дополнительные уравнения для моментов второго порядка полей температуры и концентраций. В течениях общего вида имеются в силу симметрии шесть компонент тензора напряжений Рейнольдса $u_i u_j$ и по три компоненты корреляций вида $u_i t$ и $u_i q$, два компонента t^2 и q^2, и уравнение для корреляции вида tq. Следовательно, требуется решить пятнадцать уравнений в частных производных. Для определения некоторых членов системы уравнения используются приближенные полуэмпирические соотношения. Рассматривая сдвиговые турбулентные течения, предполагается приближение Буссинеска, т.е. изменения плотности малы, и она учитывается только в массовых силах

$$F_{ui} = -\beta g\left(\delta_{3i}\overline{tu_j} + \delta_{3j}\overline{tu_i}\right) + \alpha g\left(\delta_{3i}\overline{qu_j} + \delta_{3j}\overline{qu_i}\right) \qquad (1)$$

$$F_{ti} = g\delta_{3i}\left(-\beta\overline{t^2} + \alpha\overline{tq}\right) \qquad F_{qi} = g\delta_{3i}\left(-\beta\overline{tq} + \alpha\overline{q^2}\right)$$

Используя уравнения (6-10, ЛЕК-4) с учетом (1) получим следующую систему уравнений

$$\overline{u_j u_k}\frac{\partial U_i}{\partial x_k} + \overline{u_i u_k}\frac{\partial U_j}{\partial x_k} + k\frac{\sqrt{E}}{l}\left(\overline{u_i u_j} - \frac{2}{3}\delta_{ij}E\right) + \frac{2}{3}c\delta_{ij}\frac{E^{3/2}}{l}$$

$$-\beta g\left(\delta_{3i}\overline{tu_j} + \delta_{3j}\overline{tu_i}\right) + \alpha g\left(\delta_{3i}\overline{qu_j} + \delta_{3j}\overline{qu_i}\right) = 0$$

$$\overline{u_k t}\frac{\partial \overline{U}_i}{\partial x_k} + \overline{u_i u_k}\frac{\partial T}{\partial x_k} + k_t\frac{\sqrt{E}}{l}\overline{u_i t} + g\delta_{3i}\left(-\beta\overline{t^2} + \alpha\overline{tq}\right) = 0$$

(3.7)(2)

$$\overline{u_k t}\frac{\partial T}{\partial x_k}+c_t\frac{t^2\sqrt{E}}{l}=0$$

$$\overline{u_k q}\frac{\partial \overline{U}_i}{\partial x_k}+\overline{u_i u_k}\frac{\partial Q}{\partial x_k}+k_q\frac{\sqrt{E}}{l}\overline{u_i q}+g\delta_{3i}\left(-\beta\overline{tq}+\alpha\overline{q^2}\right)=0$$

$$\overline{u_k q}\frac{\partial Q}{\partial x_k}+c_q\frac{q^2\sqrt{E}}{l}=0$$

$$\overline{u_k t}\frac{\partial \overline{Q}}{\partial x_k}+\overline{u_k q}\frac{\partial T}{\partial x_k}+c_q\frac{\sqrt{E}}{l}\overline{tq}=0$$

Решение системы в уравнении (2) относительно пульсационных характеристик, считая параметры средних течений известными, получим в следующем виде, где решение состоит их двух сомножителей. Первый, из которых соответствуют течению в однородной среде, а второй учитывает влияние архимедовых сил, вызванных полем температуры и концентрации.

$$\begin{aligned}
&E=E_0\varphi,\quad \overline{u_1^{\,2}}=\left(\overline{u_1^{\,2}}\right)_0\Omega_1,\quad \overline{u_2^{\,2}}=\left(\overline{u_2^{\,2}}\right)_0\Omega_2,\quad \overline{u_3^{\,2}}=\left(u_3^{\,2}\right)_0\Omega_3\\
&\overline{u_1\,u_3}=\left(\overline{u_1\,u_3}\right)_0\Omega_4,\quad \overline{u_2\,u_3}=\left(\overline{u_2\,u_3}\right)_0\Omega_5\,,\quad \overline{u_1\,u_2}=\left(\overline{u_1\,u_2}\right)_0\Omega_6\\
&\overline{tu_3}=\left(\overline{tu_3}\right)_0\Omega_9\,,\quad \overline{tu_1}=\left(\overline{tu_1}\right)_0\Omega_7\,,\quad \overline{tu_2}=\left(\overline{tu_2}\right)_0\Omega_8\quad \overline{t}^{2}=\left(\overline{t}^{2}\right)_0\Omega_{10}\,, \qquad (3)\\
&\overline{qu_3}=\left(\overline{qu_3}\right)_0\Omega_{13}\,,\quad \overline{qu_1}=\left(\overline{qu_1}\right)_0\Omega_{11}\,,\quad \overline{qu_2}=\left(\overline{qu_2}\right)_0\Omega_{12}\,,\quad \overline{q}^{2}=\left(\overline{q}^{2}\right)_0\Omega_{14}\\
&\overline{qt}=\left(\overline{qt}\right)_0\Omega_{15}
\end{aligned}$$

где выражения для однородной среды

$$\left(\overline{u_3^{\,2}}\right)_0 = \frac{2}{3}\left(1-\frac{c}{k}\right)\frac{1}{c^{2/3}}l^2\left[\left(\frac{\partial U_1}{\partial x_3}\right)^2+\left(\frac{\partial U_2}{\partial x_3}\right)^2\right]$$

$$\left(\overline{u_1^{\,2}}\right)_0 = \frac{2}{3}\frac{c}{k}\frac{1}{c^{2/3}}l^2\left[\left(\frac{k}{c}-1\right)\left(\frac{\partial U_2}{\partial x_3}\right)^2+\left(\frac{k}{c}+2\right)\left(\frac{\partial U_1}{\partial x_3}\right)^2\right]$$

$$\left(\overline{u_2^{\,2}}\right)_0 = \frac{2}{3}\frac{c}{k}\frac{1}{c^{2/3}}l^2\left[\left(\frac{k}{c}-1\right)\left(\frac{\partial U_1}{\partial x_3}\right)^2+\left(\frac{k}{c}+2\right)\left(\frac{\partial U_2}{\partial x_3}\right)^2\right]$$

$$\left(-\overline{u_1u_3}\right)_0 = l^2\sqrt{\left(\frac{\partial U_2}{\partial x_3}\right)^2+\left(\frac{\partial U_1}{\partial x_3}\right)^2}\left(\frac{\partial U_1}{\partial x_3}\right)$$

$$\left(-\overline{u_2u_3}\right)_0 = l^2\sqrt{\left(\frac{\partial U_2}{\partial x_3}\right)^2+\left(\frac{\partial U_1}{\partial x_3}\right)^2}\left(\frac{\partial U_2}{\partial x_3}\right)$$

$$\left(\overline{u_1u_2}\right)_0 = 2\frac{c^{1/3}}{k}l^2\left(\frac{\partial U_1}{\partial x_3}\right)\left(\frac{\partial U_2}{\partial x_3}\right)$$

$$\left(\overline{u_1t}\right)_0 = 2\frac{c^{1/3}}{k_t}\left(1+\frac{k}{k_t}\right)l^2\left(\frac{\partial U_1}{\partial x_3}\right)\left(\frac{\partial T}{\partial x_3}\right)$$

$$\left(\overline{u_2t}\right)_0 = 2\frac{c^{1/3}}{k_t}\left(1+\frac{k}{k_t}\right)l^2\left(\frac{\partial U_2}{\partial x_3}\right)\left(\frac{\partial T}{\partial x_3}\right)$$

$$\left(-\overline{u_3t}\right)_0 = \frac{k}{k_t}l^2\sqrt{\left(\frac{\partial U_2}{\partial x_3}\right)^2+\left(\frac{\partial U_1}{\partial x_3}\right)^2}\left(\frac{\partial T}{\partial x_3}\right)$$

$$\left(\overline{t^2}\right)_0 = \frac{k}{k_t}\frac{c}{c_t}\frac{1}{c^{2/3}}\,l^2\left(\frac{\partial T}{\partial x_3}\right)^2$$

$$\left(\overline{u_1 q}\right)_0 = 2\frac{c^{1/3}}{k_q}\left(1+\frac{k}{k_q}\right)l^2\left(\frac{\partial U_1}{\partial x_3}\right)\left(\frac{\partial Q}{\partial x_3}\right)$$

$$\left(\overline{u_2 q}\right)_0 = 2\frac{c^{1/3}}{k_q}\left(1+\frac{k}{k_q}\right)l^2\left(\frac{\partial U_2}{\partial x_3}\right)\left(\frac{\partial Q}{\partial x_3}\right)$$

$$\left(-\overline{u_3 q}\right)_0 = \frac{k}{k_q}\,l^2\sqrt{\left(\frac{\partial U_2}{\partial x_3}\right)^2+\left(\frac{\partial U_1}{\partial x_3}\right)^2}\left(\frac{\partial Q}{\partial x_3}\right)$$

$$\left(\overline{q^2}\right)_0 = \frac{k}{k_q}\frac{c}{c_q}\frac{1}{c^{2/3}}\,l^2\left(\frac{\partial Q}{\partial x_3}\right)^2$$

$$E_0 = \frac{1}{c^{2/3}}\,l^2\left[\left(\frac{\partial U_1}{\partial x_3}\right)^2+\left(\frac{\partial U_2}{\partial x_3}\right)^2\right]$$

Функций учитывающие влияние стратификации на турбулентный поток имеют следующий вид, отметим, что некоторые функции совпадают в силу симметрии исходных уравнении.

$$\Psi = \varphi^2 + \varphi\left[Rt\left(\frac{k}{c_t} + \frac{k}{c_s}\frac{\Pr}{Sc} + 2\right) - Rq\left(\frac{k}{c_q} + \frac{k}{c_s}\frac{Sc}{\Pr} + 2\right)\right] + Rt^2\frac{k}{c_s}\frac{\Pr}{Sc}\left(\frac{k}{c_t} + 2\right) +$$

$$+ Rq^2\frac{Sc}{\Pr}\frac{k}{c_s}\left(2 + \frac{k}{c_q}\right) - Rt\cdot Rq\left[\frac{k}{c_t}\frac{k}{c_q} + 2\cdot\frac{k}{c_s}\left(\frac{c_t}{c_q} + \frac{c_q}{c_t}\right)\right]$$

$$\Omega_3 = \frac{\varphi}{\Psi}\left\{\varphi^2 + \varphi\left[Rt\left(\frac{k}{c_t} + \frac{k}{c_s}\frac{\Pr}{Sc}\right) - Rq\left(\frac{k}{c_q} + \frac{k}{c_s}\frac{Sc}{\Pr}\right)\right] +\right.$$

$$\left. + \frac{k}{c_s}\left(Rt^2\frac{k}{c_t}\frac{\Pr}{Sc} + Rq^2\frac{k}{c_q}\frac{Sc}{\Pr}\right) - Rt\cdot Rq\frac{k}{c_t}\frac{k}{c_q}\right\}$$

$$\Omega_1 = \frac{\varphi}{\frac{2}{3}\left(2 + \frac{c}{k}\right)\Psi}\left\{\frac{2}{3}\left(2 + \frac{c}{k}\right)\varphi^2 + \varphi\cdot Rt\left[\frac{2}{3}\left(2 + \frac{c}{k}\right)\cdot\left(\frac{k}{c_t} + \frac{k}{c_s}\frac{\Pr}{Sc}\right) + 4\right] -\right.$$

$$- \varphi\cdot Rq\left[\frac{2}{3}\left(2 + \frac{c}{k}\right)\cdot\left(\frac{k}{c_q} + \frac{k}{c_s}\frac{Sc}{\Pr}\right) + 4\right] + Rt^2\frac{k}{c_s}\frac{\Pr}{Sc}\left[\frac{2}{3}\left(2 + \frac{c}{k}\right)\frac{k}{c_t} + 4\right] +$$

$$\left. + Rq^2\frac{k}{c_s}\frac{Sc}{\Pr}\left[\frac{2}{3}\left(2 + \frac{c}{k}\right)\frac{k}{c_q} + 4\right] - Rt\cdot Rq\left[4\frac{k}{c_s}\left(\frac{c_t}{c_q} + \frac{c_q}{c_t}\right) + \frac{2}{3}\left(2 + \frac{c}{k}\right)\frac{k}{c_t}\frac{k}{c_q}\right]\right\}$$

$$\Omega_2 = \Omega_1$$

$$\Omega_4 = \frac{\varphi^{3/2}}{(\varphi + Rt - Rq)\Psi}\left\{\varphi^2 + \varphi\left[Rt\left(\frac{k}{c_t} + \frac{k}{c_s}\frac{\Pr}{Sc} - \frac{1}{\Pr}\right) - Rq\left(\frac{k}{c_q} + \frac{k}{c_s}\frac{Sc}{\Pr} - \frac{1}{Sc}\right)\right] + \right.$$

$$\left. + Rt^2\frac{k}{c_s}\frac{1}{Sc}\left(\frac{k}{c_t} - 1\right) + Rq^2\frac{k}{c_s}\frac{1}{\Pr}\left(\frac{k}{c_q} - 1\right) - Rt\cdot Rq\left[\frac{k}{c_s}\left(\frac{c_t}{c_q}\frac{1}{\Pr} + \frac{c_q}{c_t}\frac{1}{Sc}\right) - \frac{k}{c_t}\frac{k}{c_q}\right]\right\}$$

$$\Omega_5 = \Omega_4, \qquad \Omega_6 = \frac{\Omega_4}{\sqrt{\varphi}} \qquad \Omega_9 = \frac{1}{\Psi}\left\{\varphi^{3/2}\left[\varphi + \frac{k}{c_s}\left(Rt\frac{\Pr}{Sc} - Rq\frac{c_t}{c_q}\right)\right]\right\}$$

$$\Omega_7 = \frac{\varphi}{(\varphi + Rt - Rq)(1 + \Pr)\Psi}\left\{\varphi^2(1 + \Pr) + \varphi\cdot Rt\left[\frac{k_t}{c_t} + \frac{k}{c_s}\frac{\Pr}{Sc}(1 + \Pr)\right] - \right.$$

$$- \varphi\cdot Rq\left(\frac{k_t}{c_q} + \frac{k_q}{c_s} + 1 - \frac{\Pr}{Sc} + \frac{k}{c_s}\frac{c_t}{c_q}\right) + Rt^2\frac{k}{c_s}\frac{k_t}{c_t}\frac{\Pr}{Sc} + Rq^2\frac{k}{c_s}\left(\frac{k_q}{c_q} + \frac{c_t}{c_q} - 1\right) -$$

$$\left. - Rt\cdot Rq\left[\frac{k}{c_s}\left(\frac{\Pr}{Sc} - \frac{c_q}{c_t}\frac{1}{Sc}\right) + \frac{k_t}{c_t}\frac{k}{c_q}\right]\right\}$$

$$\Omega_8 = \Omega_7 \qquad \Omega_{10} = \frac{\varphi}{\Psi}\left[\varphi + \frac{k}{c_s}\left(Rt\frac{\Pr}{Sc} - Rq\frac{c_t}{c_q}\right)\right]$$

$$\Omega_{13} = \frac{1}{\Psi}\left\{\varphi^{3/2}\left[\varphi + \frac{k}{c_s}\left(Rt\frac{c_q}{c_t} - Rq\frac{Sc}{\Pr}\right)\right]\right\}$$

$$\Omega_{11} = \frac{\varphi}{(\varphi + Rt - Rq)(1+Sc)\Psi}\left\{\varphi^2(1+Sc) - \varphi\cdot Rq\left[\frac{k_q}{c_q} + \frac{k}{c_s}\frac{Sc}{\Pr}(1+Sc)\right] + \right.$$

$$+\varphi\cdot Rt\left(\frac{k_t}{c_s} + \frac{k_q}{c_t} + 1 - \frac{Sc}{\Pr} + \frac{k}{c_s}\frac{c_q}{c_t}\right) + Rq^2\frac{k}{c_s}\frac{k_q}{c_q}\frac{Sc}{\Pr} + Rt^2\frac{k}{c_s}\left(\frac{k_t}{c_t} + \frac{c_q}{c_t} - 1\right) -$$

$$\left. - Rt\cdot Rq\left[\frac{k}{c_s}\left(\frac{Sc}{\Pr} - \frac{c_t}{c_q}\frac{1}{\Pr}\right) + \frac{k_q}{c_q}\frac{k}{c_t}\right]\right\}$$

$$\Omega_{12} = \Omega_{11} \qquad \Omega_{14} = \frac{\varphi}{\Psi}\left[\varphi + \frac{k}{c_s}\left(Rt\frac{c_q}{c_t} - Rq\frac{Sc}{\Pr}\right)\right]$$

$$\Omega_{15} = \frac{\varphi}{(Sc+\Pr)\Psi}\left[\varphi\cdot(Sc+\Pr) + Rt\frac{k}{c_s}\Pr\left(\frac{c_q}{c_t} + 1\right) - Rq\frac{k}{c_s}Sc\left(\frac{c_t}{c_q} + 1\right)\right]$$

$$\varphi = \frac{1}{3}\left[1 - Rt\left(\lambda_1 + \frac{k}{c_s}\frac{\Pr}{Sc}\right) + Rq\left(\lambda_2 + \frac{k}{c_s}\frac{Sc}{\Pr}\right)\right] + \left(\sqrt{\Phi} - \Theta\right)^{1/3} - \left(\sqrt{\Phi} + \Theta\right)^{1/3}$$

$$\Theta = \left(\frac{\omega}{3}\right)^3 - \frac{\omega\zeta}{6} + \frac{\phi}{2} \qquad \Phi = \Theta^2 + \left(\frac{\zeta}{3} - \frac{\omega^2}{9}\right)^3$$

$$\lambda_1 = \frac{2}{3}\left(\frac{k}{c} - 1\right) + \frac{k}{c_t} + 3 \qquad \lambda_2 = \frac{2}{3}\left(\frac{k}{c} - 1\right) + \frac{k}{c_q} + 3$$

$$\lambda_3 = \frac{k}{c_s}\frac{2}{3}\left(2 + \frac{k}{c}\right)\left(\frac{c_t}{c_q} + \frac{c_q}{c_t}\right) + \frac{k}{c_t}\frac{k}{c_q}$$

$$\omega = Rt\left(\lambda_1 + \frac{k}{c_s}\frac{\Pr}{Sc}\right) - Rq\left(\lambda_2 + \frac{k}{c_s}\frac{Sc}{\Pr}\right) - 1$$

$$\zeta = Rt^2\left[\lambda_1\left(\frac{k}{c_s}\frac{\Pr}{Sc} + 1\right) - 1\right] + Rq^2\left[\lambda_2\left(\frac{k}{c_s}\frac{Sc}{\Pr} + 1\right) - 1\right] -$$

$$- Rt \cdot Rq \cdot \left[\frac{k}{c_s}\left(\frac{Sc}{\Pr} + \frac{\Pr}{Sc}\right) - 2 + \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3\right] +$$

$$+ Rt\left(\frac{1}{\Pr} - \frac{k}{c_s}\frac{\Pr}{Sc} - \frac{k}{c_t}\right) - Rq\left(\frac{1}{Sc} - \frac{k}{c_s}\frac{Sc}{\Pr} - \frac{k}{c_q}\right)$$

$$\phi = (Rt - Rq)\left\{\left[Rt^2\frac{k}{c_s}\frac{\Pr}{Sc}(\lambda_1 - 1) + Rq^2\frac{k}{c_s}\frac{Sc}{\Pr}(\lambda_2 - 1)\right] - Rt \cdot Rq \cdot \lambda_3\right\} +$$

$$+ Rt^2\frac{k}{c_s}\frac{1}{Sc}\left(1 - \frac{k_t}{c_t}\right) + Rq^2\frac{k}{c_s}\frac{1}{\Pr}\left(1 - \frac{k_q}{c_q}\right) + Rt \cdot Rq \cdot \frac{k}{c_s}\left(\frac{k}{c_s} - \frac{c_t}{c_q}\frac{1}{\Pr} - \frac{c_q}{c_t}\frac{1}{Sc}\right)$$

Rt, Rq - числа Ричардсона, зависящие от температуры и концентрации соответственно.

$$Rt = \frac{2}{3}\frac{\beta g\dfrac{\partial T}{\partial x_3}}{\Pr\left(\dfrac{k}{c}-1\right)\left[\left(\dfrac{\partial U_1}{\partial x_3}\right)^2+\left(\dfrac{\partial U_2}{\partial x_3}\right)^2\right]}$$

$$Rq = \frac{2}{3}\frac{\alpha g\dfrac{\partial Q}{\partial x_3}}{Sc\left(\dfrac{k}{c}-1\right)\left[\left(\dfrac{\partial U_1}{\partial x_3}\right)^2+\left(\dfrac{\partial U_2}{\partial x_3}\right)^2\right]}$$

$\Pr, Sc$-турбулентные числа Прандтля и Шмидта соответственно, которые зависят от физических свойств жидкости. Все константы c_q, c_t, c_s, k_t, k_q определяются через k и c.

$$k = \sqrt{\frac{c}{k}}\left[\frac{2}{3}\left(\frac{k}{c}-1\right)\right]^{3/4} \qquad c = \left(\frac{c}{k}\right)^{3/2}\left[\frac{2}{3}\left(\frac{k}{c}-1\right)\right]^{3/4}$$

где $\dfrac{k}{c}$ не зависит от типов течения и определяется из теории изотропной турбулентности как коэффициент анизотропии и равно 7. Как уже обсуждалась в разделе 3.1, коэффициенты имеют следующие значения

$$\Pr = \frac{k}{k_t} \cong 0{,}75 \quad Sc = \frac{k}{k_t} \cong 0{,}75 \quad \frac{c_t}{c_q} = 1 \quad c_s = c_t + c_q$$

Таким образом, полученные выражения позволяют замкнуть уравнения Рейнольдса для сложных течений атмосферы и океанологии, где в потоке одновременно присутствуют температура и концентрация, и рассчитать как основные, так и турбулентные пульсационные характеристики потока.